УДК 517.6 517.958

АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Аннотация: Предложен алгоритм решения уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности с восьмым алгебраическим порядком погрешности. Для симметрической пяти диагональной матрицы получены формулы прогонки системы линейных уравнений с краевым условием Дирихле. Доказаны достаточные условия корректности формул прогонки вперёд для пяти диагональной симметрической матрицы. Аппроксимация узловых значений решения для оператора Пуассона по симметричному шаблону содержит только частные производные чётного порядка по каждой из координат.

Ключевые слова: численные методы решения эллиптических уравнений математической физики, достаточные условия корректности формул прогонки пяти диагональной матрицы.

THE APROXIMATION of the EQUATION of the POISSON ON RECTANGLE RAISED ACCURACY

Pastuhov D.F., Pastuhov YU.F.

The Abstract: is Offered algorithm of the decision of the equation of the Poisson on rectangle raised accuracy with eighth algebraic rather inaccuracy. Formulas of the dugout of the system of the linear equations are received for symmetrical five diagonal matrixes with marginal condition Dirihle. It is proved sufficient conditions to correctness molded the dugout for five diagonal symmetrical matrixes onward. The Decomposition in row Taylor symmetrical pattern for operator of the Poisson contains only quotient of the derived even order on each of coordinates.

The Keywords: the numerical methods of the decision of the elliptical equations mathematical physicists, sufficient conditions to correctness molded the dugout five diagonal matrixes.

Введение

Задачи с численным решением уравнения Пуассона встречаются во многих физико-технических приложениях, большой класс краевых задач математической физики также сводится к уравнению Пуассона на прямоугольнике. В статье[1] Блохина Н.С. исходную гидродинамическую задачу сводит к замкнутой системе четырёх уравнений в частных производных относительно функций тока и вихря жидкости, три из которых являются уравнениями параболического типа, а четвёртое представляет уравнение Пуассона относительно функции тока, а правая часть уравнения равна функции вихря. Система данных уравнений решается многократно по циклу методом чередующихся направлений. Следовательно, точность аппроксимации уравнения Пуассона является актуальной задачей в прикладной математике. Важно выработать численные алгоритмы решения уравнения Пуассона с большим алгебраическим порядком погрешности для экономии времени счёта и сохранения небольшой нормы погрешности. В работе[2, стр.227] приведена явная разностная формула на девятиточеченом шаблоне, позволяющая найти решение уравнения Пуассона методом простой итерации. Симметричным девяти точечным шаблоном можно покрыть весь прямоугольник по общим границам, который является универсальным шаблоном внутри прямоугольника и на его сторонах (границах). Приведенная авторами формула простой итерации даёт четвёртый порядок невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность $10^{-5}-10^{-6}$. Такой же порядок относительной погрешности приводится в программах для решения эллиптических уравнений у А.А. Самарского[3].

В данной работе нами предложен алгоритм для решения уравнения Пуассона. По формуле простой итерации и с шестым порядком погрешности находятся узловые значения решения вблизи четырёх вершин прямоугольника. Методом прогонки с трёх диагональной матрицей, устойчивость которой обеспечивает частично неявная разностная формула с шестым порядком погрешности, находятся приграничные узловые значения численного решения. Внутренние узловые значения решения на следующем итерационном слое находятся по частично неявной итерационной формуле с десятым порядком погрешности на симметричном 25 точечном шаблоне с пяти диагональной матрицей прогонки. Кроме аппроксимирующих формул с указанными порядками погрешности нами получено достаточное условие корректности метода прогонки с пяти диагональной матрицей. Приведенный нами алгоритм даёт восьмой порядок (при числе узлов порядка 1600) невязки уравнения Пуассона в равномерной норме и общую относительную погрешность

$10^{-13} - 10^{-14}$ при одних и тех же параметрах задачи, что и в работе[2]. Приведен пример, решённый аналитически, и написана программа на языке FORTRAN, поддерживающем максимальные размерности массива решения. В отличие от работы[3], где для шаблона граничного разностного оператора можно использовать любое число узлов и добиться равенства порядков погрешности внутреннего и граничного операторов, в данной задаче граничный оператор имеет порядок погрешности на 2 меньше чем внутренний оператор, так как шаблон граничного оператора имеет меньше число узлов чем шаблон внутреннего оператора.

Постановка задачи

В качестве примера для разностной схемы решим уравнение Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x), \ \ 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = \sin(y) \\ u(x,0) = u(x, \pi) = \sin(x) \\ 0 \le x, y \le \pi \end{cases} \tag{1}$$

Проведём редукцию линейной задачи (1)[5]. Т.е. сведём решение (1) к сумме решений 3 простых систем:

$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$. Первая система содержит одно неоднородное краевое условие:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \ \ 0 < x, y < \pi \\ u_1(0, y) = u_1(\pi, y) = \sin(y) \\ u_1(x,0) = u_1(x, \pi) = 0 \\ 0 \le x, y \le \pi \end{cases}$$

Решаем задачу 1) методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y), X^{''}Y + XY^{''} = 0$

Выберем функцию $Y(y) = \sin(y)$, совпадающую с неоднородным граничным условием на первой части границы и автоматически обращающее в 0 решение на второй части границы. Тогда для $X(x)$:

$$X^{''}\sin(y) - X\sin(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^{''} - X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Общее решение последней краевой задачи находим на множестве гиперболических функций

$$X(x) = Ash(x) + Bch(x), sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Используя граничные условия:

$$X(0) = Ash(0) + Bch(0) = B = 1;\ X(\pi) = Ash(\pi) + ch(\pi) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}$$

Запишем решение 1) частной задачи: $u_1(x, y) = \left(\left(\dfrac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(x) + ch(x)\right)\sin(y)$

Ищем решение второй частной задачи:

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \;\; 0 < x, y < \pi \\ u_2(0, y) = u_2(\pi, y) = 0 \\ u_2(x,0) = u_2(x, \pi) = \sin(x) \\ 0 \le x, y \le \pi \end{cases}$

Аналогично, разделяя переменные, выбираем функцию $X(x) = \sin(x)$, автоматически удовлетворяющую первому граничному условию 2) и совпадающую со вторым граничным условием.

$$Y^{"} \sin(x) - Y \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y^{"} - Y = 0 \\ Y(0) = Y(\pi) = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Краевые задачи (3) и (2) совпадают с точностью до замены переменных $X \to Y, x \to y$.

Поэтому выписываем ответ для задачи 2):

$$u_2(x, y) = \left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(y) + ch(y) \right) \sin(x)$$

Находим решение третьей задачи с уравнением Пуассона и однородными краевыми условиями:

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = \sin(x), \;\; 0 < x, y < \pi \\ u_3(0, y) = u_3(\pi, y) = 0 \\ u_3(x,0) = u_3(x, \pi) = 0 \\ 0 \le x, y \le \pi \end{cases}$

Разделяя переменные, выбираем функцию аргумента x и повторяющую неоднородность уравнения Пуассона $X(x) = \sin(x), \; u(x, y) = \sin(x) Y(y)$. При этом автоматически выполняется первое краевое условие задачи 3), решение подставим в уравнение Пуассона:

$$-\sin(x) Y + Y^{"} \sin(x) = \sin(x) \Leftrightarrow Y^{"} - Y = 1$$

$$\begin{cases} Y^{"} - Y = 1 \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Находим частное решение дифференциального уравнения краевой задачи (4).

$Y_{part}(y) = -1$. Общее решение однородного уравнения следующее:

$$Y(y) = Ash(y) + Bch(y)$$

Общее решение неоднородного ОДУ есть сумма частного неоднородного и общего однородного уравнений.

$$Y_н(y) = -1 + Ash(y) + Bch(y)$$

Теперь нужно выполнить краевые условия задачи (4)

$$Y_н(0) = -1 + Ash(0) + Bch(0) = B - 1 = 0 \Leftrightarrow B = 1$$

$$Y_н(\pi) = -1 + Ash(\pi) + ch(\pi) = 0 \Leftrightarrow A = \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right)$$

Тогда решение краевой задачи (4) есть

$$u_3(x, y) = \left(-1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(y) + ch(y)\right)\sin(x)$$

Решение исходной задачи (1) есть сумма решений 3 частных задач:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) = \left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(x) + ch(x)\right)\sin(y) +$$

$$+\left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(y) + ch(y)\right)\sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)}\right) sh(y) + ch(y)\right)\sin(x) \qquad (5)$$

Подстановкой формулы (5) в три уравнения системы(1) убеждаемся, что она является решением задачи (1), а в силу теорем существования и единственности для уравнения Пуассона[5] её единственным решением.

Нам придётся раскладывать в ряд Тейлора сумму узловых значения функций на симметрично расположенных узлах с центральным значением $u_{0,0}$. Для сокращения выкладок докажем:

Утверждение 1. Пусть множество узлов шаблона с центром (0,0) можно разбить на прямоугольники с вершинами в данных узлах и сторонами параллельными координатным осям, тогда разложение оператора Лапласа в ряд имеет только производные с чётным порядком по каждой из координат.

Доказательство. Обозначим координаты 4 вершин прямоугольника $(h_1, h_2), (h_1, -h_2), (-h_1, -h_2), (h_1, -h_2)$ соответственно с узловыми значениями $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{1,-2}$. В силу равно удаления узлов от центра и симметрии шаблона аппроксимация оператора Лапласа содержит узловые значения $u_{1,2}, u_{1,-2}, u_{-1,-2}, u_{1,-2}$ с равными весами. По формуле Ньютона - Лейбница имеем:

$$u_{1,2} + u_{1,-2} + u_{-1,-2} + u_{-1,2} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k}\frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k}\frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} +\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m}}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k}\frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k}}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k}\frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m!}\left(C_m^k h_1^k h_2^{m-k}\frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(1 + (-1)^{m+k} + (-1)^m + (-1)^k\right)\right)\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m!} C_m^k h_1^k h_2^{m-k}\frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}}\left\{\begin{matrix} 1 - (-1)^k - 1 + (-1)^k = 0, m = 2l + 1 \\ 2 + 2(-1)^k = \begin{cases} 0, k = 2s + 1 \\ 4, k = 2s \end{cases}, m = 2l \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4u_{0,0} + 4\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{l}\frac{C_{2l}^{2s}}{(2l)!} h_1^{2s} h_2^{2l-2s}\frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2s}\partial y^{2l-2s}} \qquad (6)$$

В формуле(6) частные производные $\dfrac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2s}\partial y^{2l-2s}}$ вычисляются в центральном узле (0,0). Множество узлов шаблона разбивается на четверки вершин, и согласно формуле (6) разложение в ряд Тейлора содержит производные только чётного порядка $2l$ (и чётного порядка по каждой переменной $2s,2l-2s$). Тогда разложение оператора Лапласа в ряд с учётом всех узлов шаблона содержит только производные чётных порядков $2s,2l-2s$ (хотя каждая четвёрка вершин имеет свой весовой коэффициент в квадратурной формуле). Что и завершает доказательство **утверждения 1**.

Аппроксимация внутреннего оператора

Для аппроксимации уравнения Пуассона на внутренних узлах равномерной прямоугольной сетки исследуем симметричный 25 точечный шаблон, центральный узел указан белым кружком, ось y направим вниз, ось x вправо, координаты узлов в масштабах (h_1,h_2) отмечены на рисунке целыми числами:

$$
\begin{array}{ccccc}
\bullet -2,2 & \bullet -1,2 & \bullet\, 0,2 & \bullet 1,2 & \bullet\, 2,2 \\
\bullet -2,1 & \bullet -1,1 & \bullet\, 0,1 & \bullet 1,1 & \bullet\, 2,1 \\
\bullet -2,0 & \bullet -1,0 & \circ\, 0,0 & \bullet 1,0 & \bullet\, 2,0 \\
\bullet -2,-1 & \bullet -1,-1 & \bullet\, 0,-1 & \bullet 1,-1 & \bullet\, 2,-1 \\
\bullet -2-2 & \bullet -1.-2 & \bullet\, 0,-2 & \bullet 1,-2 & \bullet\, 2,-2
\end{array}
$$

Для удобства выберем одинаковый шаг сетки по обеим переменным, т.е. случай $h_1 = h_2 = h$. Тогда раномерная сетка на прямоугольнике имеет различное число узлов на его сторонах. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$
u_{xx}+u_{yy}\equiv\Delta u\equiv f(x,y)=\frac{1}{h^2}\left(C_0u_{0,0}+C_1\left(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}\right)+C_2\left(u_{1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,1}+u_{-1,-1}\right)+\right.
$$

$$
C_3\left(u_{0,2}+u_{0,-2}+u_{2,0}+u_{-2,0}\right)+C_4\left(u_{1,2}+u_{2,1}+u_{1,-2}+u_{-2,1}+u_{-1,2}+u_{2,-1}+u_{-1,-2}+u_{-2,-1}\right)+
$$

$$
\left.+C_5\left(u_{2,2}+u_{2,-2}+u_{2,-2}+u_{-2,-2}\right)\right) \tag{7}
$$

Формула (7) использует все 25 узловых значений шаблона. Разложим в ряд Тейлора суммы четвёрок узловых значений с точностью до $O(h^{10})$ по формуле (6):

$$
u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0}=4u_{0,0}+h^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\frac{h^4}{12}\left(\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\right)+
$$

$$
\frac{h^6}{360}\left(\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6u}{\partial y^6}\right)+\frac{h^8}{20160}\left(\frac{\partial^8u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8u}{\partial y^8}\right)+O(h^{10}) \tag{8}
$$

Аналогично: $u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1}=4u_{0,0}+2h^2\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\dfrac{h^4}{6}\left(\dfrac{\partial^4u}{\partial x^4}+6\dfrac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4u}{\partial y^4}\right)+$

$$
\frac{h^6}{180}\left(\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+15\frac{\partial^6u}{\partial x^4\partial y^2}+15\frac{\partial^6u}{\partial x^2\partial y^4}+\frac{\partial^6u}{\partial y^6}\right)+\frac{h^8}{10080}\left(\frac{\partial^8u}{\partial x^8}+28\frac{\partial^8u}{\partial x^6\partial y^2}+70\frac{\partial^8u}{\partial x^4\partial y^4}+28\frac{\partial^8u}{\partial x^2\partial y^6}+\frac{\partial^8u}{\partial y^8}\right)+O(h^{10}) \tag{9}
$$

Заменим в (8) $h\to 2h$ и получим сразу формулу (10)

$$u_{0,2}+u_{0,-2}+u_{2,0}+u_{-2,0}=4u_{0,0}+4h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{4h^4}{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+$$

$$\frac{8h^6}{45}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+\frac{4h^8}{315}\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)+O\left(h^{10}\right) \qquad (10)$$

Далее имеем:

$$u_{1,2}+u_{2,1}+u_{1,-2}+u_{-2,1}+u_{-1,2}+u_{2,-1}+u_{-1,-2}+u_{-2,-1}=8u_{0,0}+\frac{4\left(1^2+2^2\right)}{2!}h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$

$$\frac{h^4}{24}\left(4\left(1^4+2^4\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+4\cdot 6\left(1^2 2^2+2^2\cdot 1^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)+\frac{h^6}{720}\left(4\left(1^6+2^6\right)\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+4\cdot 15\cdot\right.$$

$$\left.\left(1^2 2^4+2^2\cdot 1^4\right)\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\right)\right)+\frac{h^8}{40320}\left(4\left(1^8+2^8\right)\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)+4\cdot 28\left(1^6 2^2+1^2 2^6\right)\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)+\right.$$

$$\left.4\cdot 70\left(1^4 2^4+1^4 2^4\right)\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^4\partial x^4}\right)\right)+O\left(h^{10}\right)=8u_{0,0}+10h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$

$$\frac{h^4}{6}\left(17\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+48\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)+\frac{h^6}{180}\left(65\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+300\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^6}\right)\right)+$$

$$+\frac{h^8}{10080}\left(257\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)+1904\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6\partial y^2}+\frac{\partial^8 u}{\partial x^2\partial y^6}\right)+2240\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4}\right)+O\left(h^{10}\right) \qquad (11)$$

Заменим в (9) $h\to 2h$ и получим формулу (12):

$$u_{2,2}+u_{2,-2}+u_{-2,2}+u_{-2,-2}=4u_{0,0}+8h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{8h^4}{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+$$

$$\frac{16h^6}{45}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+15\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+\frac{8h^8}{315}\left(\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)+28\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6\partial y^2}+\frac{\partial^8 u}{\partial x^2\partial y^6}\right)+70\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4}\right)$$

$$+O\left(h^{10}\right) \qquad (12)$$

Подставляя в формулу(7) разложения (8)-(12), группируя слагаемые по степеням h, получим:

$$\Delta u\equiv f(x,y)=\frac{u_{0,0}}{h^2}\left(C_0+4C_1+4C_2+4C_3+8C_4+4C_5\right)+\Delta u\left(C_1+2C_2+4C_3+10C_4+8C_5\right)+$$

$$h^2\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)\left(\frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{6}+\frac{4C_3}{3}+\frac{17C_4}{6}+\frac{8C_5}{3}\right)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\left(C_2+8C_4+16C_5\right)\right)+$$

$$h^4\left(\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)\left(\frac{C_1}{360}+\frac{C_2}{180}+\frac{8C_3}{45}+\frac{65C_4}{180}+\frac{16C_5}{45}\right)+\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\right)\left(\frac{15}{180}C_2+\frac{300}{180}C_4+\frac{16}{3}C_5\right)\right)+$$

$$h^6\left(\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)\left(\frac{C_1}{20160}+\frac{C_2}{10080}+\frac{4C_3}{315}+\frac{257C_4}{10080}+\frac{8C_5}{315}\right)+\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^6\partial y^2}+\frac{\partial^8 u}{\partial x^2\partial y^6}\right)\left(\frac{28}{10080}C_2+\frac{1904}{10080}C_4+\frac{224}{315}C_5\right)\right)+$$

$$\frac{\partial^8 u}{\partial x^4\partial y^4}\left(\frac{70}{10080}C_2+\frac{2240}{10080}C_4+\frac{560}{315}C_5\right)+O\left(h^8\right) \qquad (13)$$

Замечание 1. Формула(13) аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $O\left(h^8\right)$.

Левая и правая части формулы(13) должны быть равны с точностью до $O\left(h^8\right)$. В пределе при $h \to 0$ коэффициент $\left(C_0+4C_1+4C_2+4C_3+8C_4+4C_5\right)=0$ при $\frac{u_{0,0}}{h^2}$ равен 0, иначе первое слагаемое правой части стремится к бесконечности. Коэффициент при Δu равен единице для тождественности (13) с нулевой степенью по $h^0:\left(C_1+2C_2+4C_3+10C_4+8C_5=1\right)$. Так как

$$f_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2},\ f_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2},$$

то в скобке при h^2 могут присутствовать только частные производные f_{xx}, f_{yy} (частные производные чётного порядка и по x и по y), следовательно, получаем уравнение:

$$2\left(\frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{6}+\frac{4C_3}{3}+\frac{17C_4}{6}+\frac{8C_5}{3}\right)=C_2+8C_4+16C_5$$

Учитывая операторное равенство для $\Delta^3 u$, сведём к нему коэффициент в (13) при h^4:

$$\Delta^3 u \equiv \Delta^2 f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^3 u=\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6}+3\left(\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4}\right)+\frac{\partial^6}{\partial y^6}\right)u=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},$$

получим условие на коэффициенты $3\left(\frac{C_1}{360}+\frac{C_2}{180}+\frac{8C_3}{45}+\frac{65C_4}{180}+\frac{16C_5}{45}\right)=\frac{15}{180}C_2+\frac{300}{180}C_4+\frac{16}{3}C_5$

Учитывая операторное равенство для $\Delta^4 u$, сведём к нему коэффициенты в (13) при h^6:

$$\Delta^4 u \equiv \Delta^3 f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^4 u=\left(\frac{\partial^8}{\partial x^8}+4\left(\frac{\partial^8}{\partial x^6\partial y^2}+\frac{\partial^8}{\partial x^2\partial y^6}\right)+6\frac{\partial^8}{\partial x^4\partial y^4}+\frac{\partial^8}{\partial y^8}\right)u,$$

Получим два уравнения на коэффициенты

$$4\left(\frac{C_1}{20160}+\frac{C_2}{10080}+\frac{4C_3}{315}+\frac{257C_4}{10080}+\frac{8C_5}{315}\right)=\frac{28}{10080}C_2+\frac{1904}{10080}C_4+\frac{224}{315}C_5$$

$$6\left(\frac{C_1}{20160}+\frac{C_2}{10080}+\frac{4C_3}{315}+\frac{257C_4}{10080}+\frac{8C_5}{315}\right)=\frac{70}{10080}C_2+\frac{2240}{10080}C_4+\frac{560}{315}C_5$$

Соберём все написанные условия на коэффициенты в неоднородную систему линейных уравнений, предварительно приводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases} C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 4C_3 + 8C_4 + 4C_5 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 10C_4 + 8C_5 = 1 \\ C_1 - 4C_2 + 16C_3 - 14C_4 - 64C_5 = 0 \\ C_1 - 8C_2 + 64C_3 - 70C_4 - 512C_5 = 0 \\ C_1 - 12C_2 + 256C_3 - 438C_4 - 3072C_5 = 0 \\ 3C_1 - 64C_2 + 768C_3 - 698C_4 - 16384C_5 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Система линейных неоднородных уравнений (14) имеет единственное решение

$$C_0 = -\frac{173}{70}, C_1 = \frac{8}{21}, C_2 = \frac{8}{45}, C_3 = \frac{1}{30}, C_4 = \frac{4}{315}, C_5 = \frac{1}{2520} \tag{15}$$

Используя явный вид коэффициентов (15) перепишем формулу (7):

$$\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4C_3}{3} + \frac{17C_4}{6} + \frac{8C_5}{3} = \frac{1}{2}\left(C_2 + 8C_4 + 16C_5\right) = \frac{4}{45} + \frac{16}{315} + \frac{8}{2520} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{65C_4}{180} + \frac{16C_5}{45} = \frac{1}{3}\left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{300}{180}C_4 + \frac{16}{3}C_5\right) = \frac{8}{1620} + \frac{40}{5670} + \frac{16}{22680} = \frac{4}{315}$$

$$\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{257C_4}{10080} + \frac{8C_5}{315} = \frac{1}{4}\left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{1904}{10080}C_4 + \frac{224}{315}C_5\right) = \frac{1}{8100} + \frac{68}{113400} + \frac{1}{14175} = \frac{1}{1260}$$

$$f_{0,0} + h^2\frac{\Delta f}{7} + \frac{4h^4}{315}(\Delta f)^2 + \frac{h^6}{1260}(\Delta f)^3 = \frac{1}{h^2}\left(-\frac{173}{70}u_{0,0} + \frac{8}{21}\left(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}\right) + \frac{8}{45}\left(u_{1,1} + u_{1,-1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}\right) + \right.$$

$$\frac{1}{30}\left(u_{0,2} + u_{0,-2} + u_{2,0} + u_{-2,0}\right) + \frac{4}{315}\left(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,-2} + u_{-2,1} + u_{-1,2} + u_{2,-1} + u_{-1,-2} + u_{-2,-1}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2520}\left(u_{2,2} + u_{2,-2} + u_{-2,2} + u_{-2,-2}\right) \right) + O\left(h^8\right) \tag{16}$$

Замечание 2. Из формулы (16) видно, что квадратурная формула уравнения Пуассона для внутренних узлов сетки содержит степенной ряд относительно аргумента $h^2\Delta f$ - результат того, что точный дифференциальный оператор Δu заменяется приближённой квадратурной формулой с точностью $O\left(h^{2l}\right)$, как видно из (16), старшая степень степенного ряда равна $l-1$.

Выразим из формулы(16) центральное узловое значение $u_{0,0}$ и присвоим ему верхний индекс итерации на единицу больше, чем остальным узловым значениям решения, тогда получим формулу простой итерации:

$$u_{0,0}{}^{k+1} = \frac{70}{173}\left[\frac{8}{21}\left(u_{0,1}{}^k + u_{0,-1}{}^k + u_{1,0}{}^k + u_{-1,0}{}^k\right) + \frac{8}{45}\left(u_{1,1}{}^k + u_{1,-1}{}^k + u_{-1,1}{}^k + u_{-1,-1}{}^k\right) + \right.$$

$$\frac{1}{30}\left(u_{0,2}{}^k + u_{0,-2}{}^k + u_{2,0}{}^k + u_{-2,0}{}^k\right) + \frac{4}{315}\left(u_{1,2}{}^k + u_{2,1}{}^k + u_{1,-2}{}^k + u_{-2,1}{}^k + u_{-1,2}{}^k + u_{2,-1}{}^k + u_{-1,-2}{}^k + u_{-2,-1}{}^k\right) +$$

$$+\frac{1}{2520}\left(u_{2,2}{}^{k}+u_{2,-2}{}^{k}+u_{-2,2}{}^{k}+u_{-2,-2}{}^{k}\right)-h^{2}\left(f_{0,0}+h^{2}\frac{\Delta f}{7}+\frac{4h^{4}}{315}(\Delta f)^{2}+\frac{h^{6}}{1260}(\Delta f)^{3}\right)+O\left(h^{10}\right)\Bigg] \quad (17)$$

С точки зрения устойчивости численного решения предпочтительнее использовать неявные итерационные формулы[4], тем более что, тождественно преобразуя формулу (16), мы не изменим порядок её погрешности. Запишем в вертикальном разрезе узловые значения $u_{0,-2}{}^{k+1}, u_{0,-1}{}^{k+1}, u_{0,0}{}^{k+1}, u_{0,1}{}^{k+1}, u_{0,2}{}^{k+1}$ проходящем через узел(0,0) в левой части уравнения на $k+1$ слое итерации, а в правую часть перенесём все остальные слагаемые, в которой узловые значения решения находятся в слое с номером итерации k .

$$\frac{1}{30}u_{0,-2}{}^{k+1}+\frac{8}{21}u_{0,-1}{}^{k+1}-\frac{173}{70}u_{0,0}{}^{k+1}+\frac{8}{21}u_{0,1}{}^{k+1}+\frac{1}{30}u_{0,2}{}^{k+1}=-\frac{8}{21}\left(u_{-1,0}{}^{k}+u_{1,0}{}^{k}\right)-\frac{1}{30}\left(u_{-2,0}{}^{k}+u_{2,0}{}^{k}\right)-$$

$$-\frac{8}{45}\left(u_{1,1}{}^{k}+u_{1,-1}{}^{k}+u_{-1,1}{}^{k}+u_{-1,-1}{}^{k}\right)-\frac{4}{315}\left(u_{1,2}{}^{k}+u_{2,1}{}^{k}+u_{1,-2}{}^{k}+u_{-2,1}{}^{k}+u_{-1,2}{}^{k}+u_{2,-1}{}^{k}+u_{-1,-2}{}^{k}+u_{-2,-1}{}^{k}\right)-$$

$$-\frac{1}{2520}\left(u_{2,2}{}^{k}+u_{2,-2}{}^{k}+u_{-2,2}{}^{k}+u_{-2,-2}{}^{k}\right)+h^{2}\left(f_{0,0}+h^{2}\frac{\Delta f}{7}+\frac{4h^{4}}{315}(\Delta f)^{2}+\frac{h^{6}}{1260}(\Delta f)^{3}\right)+O\left(h^{10}\right) \quad (18)$$

Неоднородная линейная система уравнений (18)относительно неизвестных узловых значений $u_{j,i}{}^{k+1}$ имеет пяти диагональную матрицу системы, которую можно решить методом прогонки. Рассмотрим сетку (множество из $n+1$ произвольных узлов) $\omega_{n+1}=\{x_0<x_1<\ldots<x_n\}$. Запишем систему линейных уравнений с пяти диагональной матрицей в общем виде:

$$A_{1k}x_{k-2}+A_{2k}x_{k-1}-C_kx_k+B_{1k}x_{k+1}+B_{2k}x_{k+2}=F_k,\, k=\overline{2,n-2} \quad (19)$$

Граничными условиями для (20) являются заданные значения решения в двух приграничных слоях, т.е. x_0, x_1, x_{n-1}, x_n - известны, $x_k, k=\overline{2,n-2}$ подлежат решению с использованием (19). В разностном уравнении (19) максимальная разность индексов равна 4, что соответствует краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения 4 порядка, а задание 4 приграничных значений функций является аналогом граничного условия 1 рода (Дирихле) для уравнения 2 порядка с 2 известными концевыми значениями функции на отрезке.

Решение (19) ищем в виде: $x_k=\lambda_{1k}x_{k+1}+\lambda_{2k}x_{k+2}+\nu_k,\ k=\overline{n-2,2}$ (20)

Тогда из(20): $x_{k-1}=\lambda_{1k-1}x_k+\lambda_{2k-1}x_{k+1}+\nu_{k-1},\ \ x_{k-2}=\lambda_{1k-2}x_{k-1}+\lambda_{2k-2}x_k+\nu_{k-2}$ (21)

Подставим x_{k-2}, x_{k-1} в (19), используя (21):

$$A_{1k}\left(\lambda_{1k-2}\left(\lambda_{1k-1}x_k+\lambda_{2k-1}x_{k+1}+\nu_{k-1}\right)+\lambda_{2k-2}x_k+\nu_{k-2}\right)+A_{2k}\left(\lambda_{1k-1}x_k+\lambda_{2k-1}x_{k+1}+\nu_{k-1}\right)-$$

$$-C_kx_k+B_{1k}x_{k+1}+B_{2k}x_{k+2}=F_k \Leftrightarrow x_k=\frac{x_{k+1}\left(B_{1k}+A_{2k}\lambda_{2k-1}+A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}\right)}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}}+$$

$$+\frac{x_{k+2}B_{2k}}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}}+\frac{A_{1k}\lambda_{1k-2}\nu_{k-1}+A_{1k}\nu_{k-2}+A_{2k}\nu_{k-1}-F_k}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}} \quad (22)$$

Сравнивая формулы(20),(22) получим значения прогоночных коэффициентов:

$$\lambda_{1k}=\frac{B_{1k}+A_{2k}\lambda_{2k-1}+A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}},\ \lambda_{2k}=\frac{B_{2k}}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}},$$

$$\nu_k=\frac{A_{1k}\lambda_{1k-2}\nu_{k-1}+A_{1k}\nu_{k-2}+A_{2k}\nu_{k-1}-F_k}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}},k=\overline{2,n-2} \qquad (23)$$

Кроме того, из формул (20)($k=0,1$) следует, что

$$x_0=\lambda_{10}x_1+\lambda_{20}x_2+\nu_0,x_1=\lambda_{11}x_2+\lambda_{21}x_3+\nu_1, \qquad (24)$$

$$x_{n-2}=\lambda_{1n-2}x_{n-1}+\lambda_{2n-2}x_n+\nu_{n-2}$$

Из формул (24) видно, что x_0,x_1 принимают фиксированные значения (условие Дирихле) при любых соседних узловых значениях, если положить $\nu_0=x_0,\lambda_{10}=\lambda_{20}=0,\nu_1=x_1,\lambda_{11}=\lambda_{21}=0$

После определения коэффициентов $\nu_0,\lambda_{10},\lambda_{20}\ \nu_1,\lambda_{11},\lambda_{21}$ формулы (23) дают остальные коэффициенты $\lambda_{1k},\lambda_{2k,}\nu_k$ (***формулы прогонки вперёд*** $k=\overline{2,n-2}$). Зная x_{n-1},x_n по формуле(24) находим x_{n-2} , так как $\lambda_{1n-2},\lambda_{2n-2},\nu_{n-2}$ найдены по формуле(23) прогонкой вперёд. Используя (20) находим все неизвестные узловые значения (***формулы прогонки назад*** $k=\overline{n-2,2}$). Доказано:

Утверждение 2. Решение линейной системы уравнений с пяти диагональной матрицей (19) и известными фиксированными значениями x_0,x_1,x_{n-1},x_n даётся алгоритмом – формулы прогонки вперёд(23) с краевыми условиями ($\nu_0=x_0,\lambda_{10}=\lambda_{20}=0,\nu_1=x_1,\lambda_{11}=\lambda_{21}=0$) и формулы прогонки назад(20).

Коэффициенты неявного разностного уравнения(18) свяжем с прогоночными коэффициентами (19):

$$A_{1k}=\frac{1}{30},A_{2k}=\frac{8}{21},C_k=\frac{173}{70},B_{1k}=\frac{8}{21},B_{2k}=\frac{1}{30},F_k=-\frac{8}{21}\left(u_{-1,0}{}^k+u_{1,0}{}^k\right)-\frac{1}{30}\left(u_{-2,0}{}^k+u_{2,0}{}^k\right)-$$

$$-\frac{8}{45}\left(u_{1,1}{}^k+u_{1,-1}{}^k+u_{-1,1}{}^k+u_{-1,-1}{}^k\right)-\frac{4}{315}\left(u_{1,2}{}^k+u_{2,1}{}^k+u_{1,-2}{}^k+u_{-2,1}{}^k+u_{-1,2}{}^k+u_{2,-1}{}^k+u_{-1,-2}{}^k+u_{-2,-1}{}^k\right)-$$

$$-\frac{1}{2520}\left(u_{2,2}{}^k+u_{2,-2}{}^k+u_{-2,2}{}^k+u_{-2,-2}{}^k\right)+h^2\left(f_{0,0}+h^2\frac{\Delta f}{7}+\frac{4h^4}{315}(\Delta f)^2+\frac{h^6}{1260}(\Delta f)^3\right),k=\overline{2,n-2} \qquad (25)$$

Утверждение 3. Пусть пяти диагональная матрица линейной системы уравнений(19) с краевым условием Дирихле (известны $x_0,x_1,x_{n-1},x_n\Leftrightarrow\lambda_{10}=\lambda_{11}=\lambda_{20}=\lambda_{21}=0$) является:

1) симметрической: $A_{1k}=B_{2k},A_{2k}=B_{1k},k=\overline{2,n-2}\left(A_{1k}\neq0,A_{2k}\neq0\right)$

2) $\frac{3}{2}\left(|A_{1k}|+|A_{2k}|+|B_{1k}|+|B_{2k}|\right)<|C_k|\left(k=\overline{2,n-2}\right),\frac{3}{2}\left(|A_{21}|+|B_{11}|+|B_{21}|\right)<|C_1|(k=1),$

$$\frac{3}{2}\left(|B_{10}|+|B_{20}|\right)<|C_0|(k=0),\frac{3}{2}\left(|A_{1n-1}|+|A_{2n-1}|+|B_{1n-1}|\right)<|C_{n-1}|(k=n-1),\frac{3}{2}\left(|A_{1n}|+|A_{2n}|\right)<|C_n|(k=n)$$

второе условие можно назвать ***строгим полуторным диагональным преобладанием***

Тогда:

1) $\left|\lambda_{1k}\right|<1,\left|\lambda_{2k}\right|<1, k=\overline{2,n-2}$

2) Формулы прогоночных коэффициентов (23) корректны

Доказательство 1) утверждения проведём по индукции. Для базы индукции $k=0,1,2$ из (23) имеем:

$$\left|\lambda_{10}\right|=\left|\lambda_{11}\right|=0<1,\left|\lambda_{12}\right|=\left|\frac{B_{12}+A_{22}\lambda_{21}+A_{12}\lambda_{10}\lambda_{21}}{C_2-A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11}-A_{12}\lambda_{20}-A_{22}\lambda_{11}}\right|=\left|\frac{B_{12}}{C_2}\right|<\left|\frac{C_2}{C_2}\right|=1$$

$$\left|\lambda_{20}\right|=\left|\lambda_{21}\right|=0<1,\left|\lambda_{22}\right|=\left|\frac{B_{22}}{C_2-A_{12}\lambda_{10}\lambda_{11}-A_{12}\lambda_{20}-A_{22}\lambda_{11}}\right|=\left|\frac{B_{22}}{C_2}\right|<\left|\frac{C_2}{C_2}\right|=1$$

Если $\left|\lambda_{1k-1}\right|<1,\left|\lambda_{2k-1}\right|<1,\left|\lambda_{1k-2}\right|<1,\left|\lambda_{2k-2}\right|<1$, то согласно (23) и утверждению 3 при $k=\overline{2,n-2}$:

$$\left|\lambda_{2k}\right|=\frac{\left|B_{2k}\right|}{\left|C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}\right|}<\frac{\left|B_{2k}\right|}{\left|C_k\right|-\left|B_{2k}\right|-\left|A_{1k}\right|-\left|A_{2k}\right|}<\frac{\left|B_{2k}\right|}{\left|B_{1k}\right|+\frac{1}{2}\left(\left|B_{2k}\right|+\left|B_{1k}\right|+\left|A_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|\right)}<\frac{\left|B_{2k}\right|}{\left|B_{2k}\right|}=1$$

$$\left|\lambda_{1k}\right|=\left|\frac{B_{1k}+A_{2k}\lambda_{2k-1}+A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{2k-1}}{C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}}\right|<\frac{\left|B_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|+\left|A_{1k}\right|}{\left|C_k\right|-\left|B_{2k}\right|-\left|A_{1k}\right|-\left|A_{2k}\right|}<\frac{\left|B_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|+\left|A_{1k}\right|}{\left|B_{1k}\right|+\frac{1}{2}\left(\left|B_{2k}\right|+\left|B_{1k}\right|+\left|A_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|\right)}=$$

$=\dfrac{\left|B_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|+\left|A_{1k}\right|}{\left|B_{1k}\right|+\left|A_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|}=1$. Т.е. из $\left|\lambda_{1k-1}\right|<1,\left|\lambda_{2k-1}\right|<1,\left|\lambda_{1k-2}\right|<1,\left|\lambda_{2k-2}\right|<1\Rightarrow\left|\lambda_{1k}\right|<1,\left|\lambda_{2k}\right|<1$

Что и требовалось доказать.

2) Для корректности формул (23) достаточно, чтобы знаменатель формул не обращался в 0.

С учётом доказанного первого утверждения
$\left|\lambda_{10}\right|=\left|\lambda_{11}\right|=0<1,\left|\lambda_{20}\right|=\left|\lambda_{21}\right|=0<1,\left|\lambda_{1k}\right|<1,\left|\lambda_{2k}\right|<1,k=\overline{2,n-2}$ имеем $\forall k=\overline{2,n-2}$:

$$\left|C_k-A_{1k}\lambda_{1k-2}\lambda_{1k-1}-A_{1k}\lambda_{2k-2}-A_{2k}\lambda_{1k-1}\right|>\left|C_k\right|-\left|B_{2k}\right|-\left|A_{1k}\right|-\left|A_{2k}\right|>\left|B_{1k}\right|+\frac{1}{2}\left(\left|B_{2k}\right|+\left|B_{1k}\right|+\left|A_{1k}\right|+\left|A_{2k}\right|\right)>0$$

Другими словами, знаменатели трёх формул (23) сохраняют знак и в 0 не обращаются. Что и т.д.

Замечание 3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что коэффициенты линейной системы уравнений (25) удовлетворяют условию корректности (**утверждение 3**):

$\dfrac{173}{70}\approx 2.471>\dfrac{3}{2}2\left(\dfrac{1}{30}+\dfrac{8}{21}\right)\approx 1.242$ - неявная система разностных уравнений (25) с пяти диагональной симметрической матрицей устойчива относительно прогоночных формул(20),(23),(24).

Аппроксимация граничного оператора

Для шаблона граничного оператора рассмотрим симметричный 15 точечный шаблон, координатные оси x, y направлены вверх и вправо, центральный узел с координатами (0,0) выделен светлым кружком. Левая граница прямоугольной области имеет координату $x=-1$ и включает 5 узлов, расположенных на ней.

$$\begin{array}{lll} \bullet -1,2 & \bullet 0,2 & \bullet 1,2 \\ \bullet -1,1 & \bullet 0,1 & \bullet 1,1 \\ \bullet -1,0 & \circ 0,0 & \bullet 1,0 \\ \bullet -1,-1 & \bullet 0,-1 & \bullet 1,-1 \\ \bullet -1-2 & \bullet 0,-2 & \bullet 1,-2 \end{array}$$

Рассмотрим случай с одинаковым шагом сетки по обоим переменным $h_1 = h_2 = h$. Аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \Delta u \equiv f(x,y) = \frac{1}{h^2}\Big(C_0 u_{0,0} + C_1\left(u_{0,1} + u_{0,-1} + u_{1,0} + u_{-1,0}\right) + C_2\left(u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}\right) +$$

$$C_3\left(u_{0,2} + u_{0,-2}\right) + C_4\left(u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2}\right)\Big) \quad (26)$$

Используем формулу (6) для разложения в ряд Тейлора суммы 4 узловых значений в вершинах прямоугольника

$$u_{1,2} + u_{-1,2} + u_{-1,-2} + u_{1,-2} = 4u_{0,0} + 2h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{h^4}{6}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 24\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 16\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) +$$

$$\frac{h^6}{180}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 60\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 240\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 64\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right) + \frac{h^8}{10080}\left(\frac{\partial^8 u}{\partial x^8} + 112\frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2} + 1120\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} + 1792\frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6} + 256\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right)$$

$$+ O\left(h^{10}\right) \quad (27)$$

$$u_{0,2} + u_{0,-2} = 2u_{0,0} + 4h^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{4h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{8h^6}{45}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{4h^8}{315}\frac{\partial^8 u}{\partial y^8} + O\left(h^{10}\right) \quad (28)$$

Подставим разложения (27),(28),(8),(9) в формулу (26) и сгруппируем слагаемые по степеням h^{2l}:

$$\Delta u \equiv f(x,y) = \frac{u_{0,0}}{h^2}\left(C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4\right) + \Delta u\left(C_1 + 2C_2 + 2C_4\right) + u_{yy}\left(4C_3 + 6C_4\right) +$$

$$h^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{C_4}{6}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(\frac{C_1}{12} + \frac{C_2}{6} + \frac{4}{3}C_3 + \frac{8C_4}{3}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\left(C_2 + 4C_4\right)\right) +$$

$$h^4\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{C_4}{180}\right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2}\left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{C_4}{3}\right) + \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4}\left(\frac{15}{180}C_2 + \frac{4C_4}{3}\right) + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\left(\frac{C_1}{360} + \frac{C_2}{180} + \frac{8C_3}{45} + \frac{64C_4}{180}\right)\right) +$$

$$h^6\left\{\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{C_4}{10080}\right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^6 \partial y^2}\left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{112}{10080}C_4\right) + \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}\left(\frac{70}{10080}C_2 + \frac{1120}{10080}C_4\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \partial y^6}\left(\frac{28}{10080}C_2 + \frac{1792}{10080}C_4\right) + \frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\left(\frac{C_1}{20160} + \frac{C_2}{10080} + \frac{4C_3}{315} + \frac{256C_4}{10080}\right)\right\} + O\left(h^8\right) \quad (29)$$

Левая и правая части формулы(29) должны быть равны с точностью до $O\left(h^8\right)$. В пределе при $h \to 0$ коэффициент $C_0 + 4C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 4C_4 = 0$ при $\frac{u_{0,0}}{h^2}$ равен 0, иначе первое слагаемое правой части стремится к бесконечности. Коэффициент при Δu равен единице для тождественности (13) с нулевой степенью по $h:(C_1+2C_2+2C_4=1)$. Коэффициент при u_{yy} должен быть равен 0, т.е. $4C_3+6C_4=0$. Все остальные слагаемые в (13) необходимо выразить через частные производные чётного порядка (и по x и по y) от правой части уравнения Пуассона – функции $f(x,y)$. Так как в скобке при h^2 могут присутствовать только частные производные f_{xx}, f_{yy}, то в общем случае получаем:

$$B_1 f_{xx}+B_2 f_{yy}=B_1\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)+B_2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)=B_1\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+(B_1+B_2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+B_2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

В силу последнего уравнения в (29)имеем связь: $\frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{6}+\frac{C_4}{6}+\frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{6}+\frac{4}{3}C_3+\frac{8C_4}{3}=(C_2+4C_4)$

Найдём связь коэффициентов в (29) с h^4. Вообще говоря, сумма со всеми чётными производными $f(x,y)$:

$$B_1\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+B_2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+B_3\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}=B_1\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}\right)+B_2\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\right)+B_3\left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^4\partial x^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)=$$
$$=B_1\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+(B_1+B_2)\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+(B_2+B_3)\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}+B_3\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}$$

В силу последнего уравнения в скобке с h^4 в(29) получаем уравнение связи:

$$\frac{15}{180}C_2+\frac{C_4}{3}-\left(\frac{C_1}{360}+\frac{C_2}{180}+\frac{C_4}{180}\right)=\frac{15}{180}C_2+\frac{4C_4}{3}-\left(\frac{C_1}{360}+\frac{C_2}{180}+\frac{8C_3}{45}+\frac{64C_4}{180}\right)\Leftrightarrow 32C_3-117C_4=0$$

По сравнению с формулой(13), у которой восьмой алгебраический порядок погрешности порядок погрешности (29) равен шести, т.е. h^6. Соберём все условия на коэффициенты в систему линейных уравнений, предварительно приводя элементарные преобразования:

$$\begin{cases}C_0+4C_1+4C_2+2C_3+4C_4=0\\ C_1+2C_2+2C_4=1\\ 4C_3+6C_4=0\\ C_1-4C_2+8C_3-7C_4=0\\ 32C_3-117C_4=0\end{cases}\qquad (30)$$

Система линейных неоднородных уравнений (30) имеет единственное решение

$$C_0=-\frac{10}{3},C_1=\frac{2}{3},C_2=\frac{1}{6},C_3=0,C_4=0,\frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{6}=\frac{1}{12},\frac{C_1}{360}+\frac{C_2}{180}=\frac{1}{360},\frac{15}{180}C_2=\frac{1}{72}\quad (31)$$

Перепишем формулу(29) с найденными коэффициентами (31)

$$\frac{1}{h^2}\left(-\frac{10}{3}u_{0,0}+\frac{2}{3}(u_{0,1}+u_{0,-1}+u_{1,0}+u_{-1,0})+\frac{1}{6}(u_{1,1}+u_{-1,1}+u_{1,-1}+u_{-1,-1})\right)=$$

$$=\Delta u+h^2\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)+\frac{1}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)+h^4\left(\frac{1}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)+\frac{1}{72}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial y^4}\right)\right)+O(h^6)=$$

$$= f + \frac{h^2}{12}\Delta f + h^4\left(\frac{1}{360}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right) + \frac{1}{90}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + O\left(h^6\right) = f_{0,0} + \frac{h^2}{12}\Delta f + h^4\left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + O\left(h^6\right) \quad (32)$$

Из (32) явно выразим $u_{0,0}{}^{k+1}$ центральное узловое значение на $k+1$ слое итерации, остальные узловые значения расположим на k слое итерации

$$u^{k+1}{}_{0,0} = \frac{1}{5}\left(u^k{}_{0,1} + u^k{}_{0,-1} + u^k{}_{1,0} + u^k{}_{-1,0}\right) + \frac{1}{20}\left(u^k{}_{1,1} + u^k{}_{-1,1} + u^k{}_{1,-1} + u^k{}_{-1,-1}\right) -$$

$$-\frac{3}{10}h^2 f_{0,0} - h^4\frac{\Delta f}{40} - h^6\frac{\Delta f^2}{1200} - \frac{h^6}{600}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + O\left(h^8\right) \quad (33)$$

Формула простой итерации, приведенная в сборнике[2] Волкова К.Н. и др., отличается от полученной нами формулы (33) отсутствием последних двух слагаемых, поэтому у нас порядок погрешности на 2 выше, а формула точнее. Из формулы (32) легко получить неявную формулу для линейной системы уравнений с трёх диагональной матрицей прогонки, получаемую как частный случай из (19) ($A_{1k} = B_{2k} = 0$):

$$\frac{2}{3}u_{0,-1}{}^{k+1} - \frac{10}{3}u_{0,0}{}^{k+1} + \frac{2}{3}u_{0,1}{}^{k+1} = -\frac{1}{6}\left(u_{1,1}{}^k + u_{1,-1}{}^k + u_{-1,1}{}^k + u_{-1,-1}{}^k\right) - \frac{2}{3}\left(u_{1,0}{}^k + u_{-1,0}{}^k\right) + h^2\left(f_{0,0} + \frac{h^2}{12}\Delta f + h^4\left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)\right) \quad (34)$$

$$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, A_k = B_k = \frac{2}{3}, C_k = \frac{10}{3},$$

$$F_k = -\frac{1}{6}\left(u_{1,1}{}^k + u_{1,-1}{}^k + u_{-1,1}{}^k + u_{-1,-1}{}^k\right) - \frac{2}{3}\left(u_{1,0}{}^k + u_{-1,0}{}^k\right) + h^2\left(f_{0,0} + \frac{h^2}{12}\Delta f + h^4\left(\frac{\Delta f^2}{360} + \frac{1}{180}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)\right), k = \overline{1, n-1} \quad (35)$$

Из (21),(23) получим формулы прогонки назад: $x_k = \lambda_k x_{k+1} + \nu_k,\ k = \overline{n-1,1}$ (36)

$$\lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k\lambda_{k-1}}, \nu_k = \frac{A_k\nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_k\lambda_{k-1}}, k = \overline{1, n-1}, \lambda_0 = 0, \nu_0 = x_0 \quad (37)$$

и (37) формулы прогонки вперёд. Условие устойчивости $|A_k| + |B_k| < |C_k|, k = \overline{n-1,1} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \frac{10}{3}$ выполнено автоматически[4]. Программа для решения уравнения Пуассона написана на FORTRAN:

```
program puasson;use dfimsl

integer(8),parameter::n=120,n1=60,m=20000; integer(8)::i,j,k,kk

real(8)::u(0:m+1,0:n1+1,0:n+1),a,b,d,pi,x,y

real(8)::res(0:n1+1,0:n+1),delta(0:n1+1,0:n+1),max,fif1(0:n+1),fif0(0:n+1),fif10(0:n+1),fif11(0:n+1)

real(8)::c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,nu00(0:n+1),ll(0:n+1)

real(8)::c(0:n+1),fif(0:n+1),l1(0:n+1),l2(0:n+1),nu(0:n+1),nu0(0:n+1),l(0:n+1)

real(8)::cch,ssh,a1(0:n+1),a2(0:n+1),b1(0:n+1),b2(0:n+1),f,laplf1,laplf2,laplf

real(8)::h1,h2,h,aa(0:n+1),bb(0:n+1),c0(0:n+1)

real(8)::ss1,ss2,aa1,aa2,bb1,bb2,cc ,c11,c22,c33,c44,c55,c66
```

```
cch(x)=(dexp(x)+dexp(-x))/2d0;ssh(x)=(dexp(x)-dexp(-x))/2d0

aa1(x,y)=dsin(y);aa2(x,y)=dsin(y);bb1(x,y)=dsin(x)

bb2(x,y)=dsin(x);f(x,y)=dsin(x)

laplf1(h1,x,y)=-h1*h1*dsin(x);ss1(h1,x,y)=h1*h1*h1*h1*dsin(x)

ss2(h1,x,y)=-h1*h1*h1*h1*h1*h1*dsin(x);laplf(h1,x,y)=-h1*h1*dsin(x)

max=-1000d0;pi=2d0*dasin(1d0);a=0d0;b=2d0*pi;cc=0d0;d=pi

h1=(b-a)/dfloat(n);h2=(d-cc)/dfloat(n1)

do i=1,n-1,1;do j=1,n1-1,1

u(0,j,i)=0d0

enddo;enddo

do k1=0,m,1; do i=0,n,1; do j=0,n1,1

x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h1*dfloat(j)

 if(i==0.or.i==n.or.j==0.or.j==n1)then

u(k1,0,i)=bb1(x,cc);u(k1,n1,i)=bb2(x,d);u(k1,j,0)=aa1(a,y);u(k1,j,n)=aa2(b,y)

endif; enddo;enddo;enddo

do kk=0,n1,1

a1(kk)=1d0/30d0;a2(kk)=8d0/21d0;b1(kk)=8d0/21d0;b2(kk)=1d0/30d0;c(kk)=173d0/70d0

enddo

 do k=0,m,1; do i=1,n-1,1; do j=1,n1-1,1

 if((i==1.and.j==1).or.(i==1.and.j==n1-1).or.(i==n-1.and.j==n1-1).or.(i==n-1.and.j==1))then

y=cc+h1*dfloat(j);x=a+h1*dfloat(i)

c1= 2d-1*(u(k,j-1,i)+u(k,j+1,i)+u(k,j,i-1)+u(k,j,i+1))

c2=5d-2* (u(k,j+1,i+1)+u(k,j+1,i-1)+u(k,j-1,i-1)+u(k,j-1,i+1))

c3=-(3d-1)*h1*h1*f(x,y)-(2.5d-2)*h1*h1*laplf(h1,x,y)-ss1(h1,x,y)*h1*h1/1200d0

u(k+1,j,i)=c1+c2+c3

endif;enddo; enddo

l(1)=0d0;l(n1-1)=0d0;ll(1)=0d0;ll(n1-1)=0d0;nu0(1)=u(k+1,1,1)

nu0(n1-1)=u(k+1,n1-1,1);nu00(1)=u(k+1,1,n-1);nu00(n1-1)=u(k+1,n1-1,n-1)

do kk=1,n1-1,1

bb(kk)=240d0; aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0

enddo
```

```
do j=2,n1-2,1
y=cc+h1*dfloat(j);x=a+h1*dfloat(i)
c4=-60d0*(u(k,j+1,2)+u(k,j+1,0)+u(k,j-1,0)+u(k,j-1,2));c5=-240d0*(u(k,j,2)+u(k,j,0))
c6=h1*h1*360d0*f(a+h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,a+h1,y)+ss1(h1,a+h1,y)*h1*h1
fif(j)=c4+c5+c6; l(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*l(j-1));nu0(j)=(aa(j)*nu0(j-1)-fif(j))/ (c0(j)-aa(j)*l(j-1))
c44= -60d0*(u(k,j+1,n)+u(k,j+1,n-2)+u(k,j-1,n)+u(k,j-1,n-2));c55=-240d0*(u(k,j,n)+u(k,j,n-2))
c66=h1*h1*360d0*f(b-h1,y)+30d0*h1*h1*laplf(h1,b-h1,y)+ss1(h1,b-h1,y)*h1*h1
fif1(j)=c44+c55+c66; ll(j)=bb(j)/(c0(j)-aa(j)*ll(j-1));nu00(j)=(aa(j)*nu00(j-1)-fif1(j))/ (c0(j)-aa(j)*ll(j-1))
enddo
do j=n1-2,2,-1
u(k+1,j,1)=l(j)*u(k,j+1,1)+nu0(j);u(k+1,j,n-1)=ll(j)*u(k,j+1,n-1)+nu00(j)
enddo
l(1)=0d0;l(n-1)=0d0;ll(1)=0d0;ll(n-1)=0d0;nu0(1)=u(k+1,1,1)
nu0(n-1)=u(k+1,1,n-1);nu00(1)=u(k+1,n1-1,1);nu00(n-1)=u(k+1,n1-1,n-1)
do kk=1,n-1,1
bb(kk)=240d0;aa(kk)=240d0;c0(kk)=1200d0
enddo
do i=2,n-2,1
x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h1*dfloat(j)
c4= -60d0*(u(k,2,i+1)+u(k,0,i+1)+u(k,0,i-1)+u(k,2,i-1));c5=-240d0*(u(k,2,i)+u(k,0,i))
c6= h1*h1*360d0*f(x,cc+h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,cc+h1)+ss1(h1,x,cc+h1)*h1*h1
fif0(i)=c4+c5+c6; l(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*l(i-1));nu0(i)=(aa(i)*nu0(i-1)-fif0(i))/ (c0(i)-aa(i)*l(i-1))
c44= -60d0*(u(k,n1,i+1)+u(k,n1-2,i+1)+u(k,n1,i-1)+u(k,n1-2,i-1))
c55=-240d0*(u(k,n1,i)+u(k,n1-2,i))
c66= h1*h1*360d0*f(x,d-h1)+30d0*h1*h1*laplf(h1,x,d-h1)+ss1(h1,x,d-h1)*h1*h1
fif10(i)=c44+c55+c66; ll(i)=bb(i)/(c0(i)-aa(i)*ll(i-1));nu00(i)=(aa(i)*nu00(i-1)-fif10(i))/ (c0(i)-aa(i)*ll(i-1))
enddo
do i=n-2,2,-1
u(k+1,1,i)=l(i)*u(k,1,i+1)+nu0(i);u(k+1,n1-1,i)=ll(i)*u(k,n1-1,i+1)+nu00(i)
enddo
do i=2,n-2,1
```

```
l1(0)=0d0;l1(1)=0d0;l2(0)=0d0;l2(1)=0d0;l1(n1)=0d0;l2(n1)=0d0;l1(n1-1)=0d0;

l2(n1-1)=0d0;nu(n1-1)=u(k+1,n1-1,i);nu(n1)=u(k+1,n1,i);nu(1)=u(k+1,1,i);nu(0)=u(k+1,0,i)

do j=2,n1-2,1

x=a+h1*dfloat(i); y=cc+h1*dfloat(j);c1=-(8d0/21d0)*(u(k,j,i+1)+u(k+1,j,i-1))

c2=-(8d0/45d0)*(u(k,j+1,i+1)+u(k+1,j-1,i-1)+u(k,j-1,i+1)+u(k+1,j+1,i-1))

c11=-(1d0/30d0)*(u(k,j,i+2)+u(k+1,j,i-2))

c3=-(4d0/315d0)*(u(k+1,j+1,i-2) + u(k,j+1,i+2) + u(k+1,j-1,i-2) + u(k,j-1,i+2))

c33=-(4d0/315d0)*(u(k+1,j+2,i-1) + u(k,j+2,i+1) + u(k+1,j-2,i-1) + u(k,j-2,i+1))

c22=-(1d0/2520d0)*(u(k,j+2,i+2)+u(k+1,j-2,i-2)+u(k,j-2,i+2)+u(k+1,j+2,i-2))

c5=h1*h1*(f(x,y) + (1d0/7d0)*(laplf1(h1,x,y)) +(4d0/315d0)*ss1(h1,x,y)+(1d0/1260d0)*ss2(h1,x,y))

fif11(j)=c1+c2+c11+c3+c33+c22+c5

l1(j)=(a1(j)*l1(j-2)*l2(j-1)+a2(j)*l2(j-1)+b1(j) )/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a2(j)*l1(j-1) -a1(j)*l2(j-2) )

l2(j)=b2(j)/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2) -a2(j)*l1(j-1) )

nu(j)=(a1(j)*l1(j-2)*nu(j-1)+a2(j)*nu(j-1)+a1(j)*nu(j-2)-fif11(j))/(c(j)-a1(j)*l1(j-2)*l1(j-1)-a1(j)*l2(j-2) -a2(j)*l1(j-1) )

enddo

do j=n1-2,2,-1

u(k+1,j,i)=l1(j)*u(k,j+1,i)+l2(j)*u(k,j+2,i)+nu(j)

enddo; enddo;enddo

do j=0,n1,1;do i=0,n,1

x=a+h1*dfloat(i);y=cc+h2*dfloat(j)

!c1= (cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))*dsin(y)

!c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))

!c3= dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))

c1= (cch(x)+ssh(x)*(1d0-cch(2d0*pi))/ssh(2d0*pi))*dsin(y);c2= dsin(x)*(cch(y)+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi))

c3= dsin(x)*(cch(y)-1d0+ssh(y)*(1d0-cch(pi))/ssh(pi));res(j,i)=c1+c2+c3;delta(j,i)= u(m,j,i)- res(j,i)

if( delta(j,i)<0d0)then

delta(j,i)=- delta(j,i);endif

if( delta(j,i)>max)then

max=delta(j,i);endif;enddo;enddo;

print*,"norma C =",max;end program puasson
```

При $n = n_1 = 20, m = 5000$ программа возвращает невязку задачи (1) в равномерной норме:

norma C = 1.1751864209253995e-10, а при $n = n_1 = 40,\ m = 5000$ norma C = 7.476241847825804e-13, что даёт 8 порядок погрешности: $\dfrac{\|\delta u_1\|_C}{\|\delta u_2\|_C} = \dfrac{1.1751864209253995\text{e-}10}{7.476241847825804\text{e-}13} \approx 234 \approx 2^8 = 256$ (так как алгебраический порядок погрешности внутреннего разностного оператора(18) равен восьми). Кроме того, при $n = n_1 = 100, m = 20000$ программа возвращает норму относительной погрешности: norma C = 6.61378111e-14 ,близкую к 1e-16,т.е. к двойной точности real(8), в то время как по формуле простой итерации у авторов[2] ($n = n_1 = 100, m = 20000$) получим: norma C =4.567879487049620e-6>1e-8(не достигает первой точности real(4) и порядок погрешности только четвёртый) –здесь $n+1, n_1+1, m$ число узлов по осям x, y и число итераций. Решим также численно и аналитически задачу Пуассона на прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x),\ \ 0 < x < 2\pi, 0 < y < \pi \\ u(0, y) = u(2\pi, y) = \sin(y),\ 0 \le y \le \pi \\ u(x,0) = u(x,\pi) = \sin(x),\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

С аналитическим решением:

$$u(x,y) = \left(\left(\frac{1-ch(2\pi)}{sh(2\pi)}\right)sh(x) + ch(x)\right)\sin(y) + + \left(\left(\frac{1-ch(\pi)}{sh(\pi)}\right)sh(y) + ch(y)\right)\sin(x) + \left(-1 + \left(\frac{1-ch(\pi)}{sh(\pi)}\right)sh(y) + ch(y)\right)\sin(x)$$

С учётом того, что высота прямоугольника в 2 раза меньше его ширины: $n = 120, n_1 = 60, m = 20000$

Программа возвращает невязку последней задачи в равномерной норме: norma C=5.972999872483342e-14.

Выводы:

1) Получены формулы прогонки для пяти диагональной системы линейных уравнений с 4 известными узловыми значениями на концах отрезка и соседних к концам узлах (краевое условие Дирихле).

2) Для симметрической матрицы со строгим полуторным диагональным преобладанием имеет место корректность полученных формул прогонки вперёд.

3) Предложен 3 – этапный алгоритм для точного решения уравнения Пуассона на прямоугольнике. 1. по формуле простой итерации(33) находят 4 значения $u^{k+1}{}_{1,n-1}, u^{k+1}{}_{1,1}, u^{k+1}{}_{n-1,1}, u^{k+1}{}_{n-1,n-1}$. 2. По формулам(34)-(37) прогонкой находят $u^{k+1}{}_{1,j}, u^{k+1}{}_{n-1,j}, u^{k+1}{}_{i,1}, u^{k+1}{}_{i,n-1},\ i, j = \overline{1, n-1}$. 3. По формулам(20), (23),(25) методом пяти диагональной прогонки и краевым условием Дирихле определяют $u^{k+1}{}_{i,j},\ i, j = \overline{2, n-2}$.

4) Доказано утверждение: на симметричных шаблонах аппроксимация оператора Лапласа выражается через частные производные чётного порядка от неизвестной функции по каждой переменной.

5) С помощью указанного алгоритма и написанной программы показано, что при небольшом числе узлов равномерной сетки(1600) алгебраический порядок погрешности равен восьми.

Литература

1) Влияние ветра на динамику развития термобара в период весеннего прогрева водоёма. Н.С. Блохина, Д.А.Соловьёв. Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. Изд. МГУ им.М.В.Ломоносова.2006.№3. С59-63.

2) Методы ускорения газодинамических расчётов на неконструированных сетках. К.Н.Волков, Ю. Н. Дерюгин, В.Н.Емельянов, А.Г.Карпенко, И. В. Тетерина. Москва, Физматлит, 2013, 536 стр.

3) Герец А.Ю., Зеленкевич А.А., Гурьева Н.А., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных. Вестник Полоцкого университета. Серия С: Фундаментальные науки.2015.№12.С. 102-109.

4) Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. – М.: Издательство ЛКИ, 2014. – 480 с.

5) А.Г.Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. Лекции по математической физике. – М.: Изд. – во МГУ, 1993 – 332 с.